Apuntes de Fundamentos Físicos de la Informática y las Comunicaciones

Antonio Flores Sintas

versión beta

TABLA DE CONTENIDOS

Prólogo

Parte de estos apuntes se corresponden con las clases impartidas durante seis cursos en la asignatura “Fundamentos Físicos de la Informática”. Los cinco primeros cursos la asignatura pertenecía a la carrera de Ingeniero Técnico en Informática, mientras que en el último, la asignatura se ha ampliado, denominándose “Fundamentos Físicos de la Ingeniería (I y II)”, y se ha integrado en el Grado en Ingeniería Informática. Tanto la ingeniería técnica como el grado se imparten en la Universidad Católica San Antonio, tendiendo la ingeniería técnica a desaparecer.

Los objetivos del texto son:

Conocer los fenómenos físicos más directamente relacionados con el funcionamiento de los componentes de los computadores y sus periféricos, como monitores, impresoras, memorias magnéticas y ópticas, circuitos electrónicos y fibras ópticas. Comprender los modelos matemáticos correspondientes a esos fenómenos. Conocer las bases de los diferentes tipos de dispositivos semiconductores, su función y características.

El conocimiento de las estructuras combinacionales básicas y las capacidades para analizar y diseñar circuitos secuenciales se ven en Fundamentos de Computadores. El conocimiento de Señales y Sistemas se adquiere en la asignatura del mismo nombre, y en Instrumentación Electrónica se identifican y utilizan los elementos básicos de un laboratorio de hardware.

La estructura de los temas se ha realizado atendiendo a los dos párrafos anteriores. En los dos primeros temas se estudia el Oscilador Armónico y el Movimiento Ondulatorio. El primero de ellos es un tema básico en la Física, de aplicación a diferentes fenómenos como vibraciones en tubos y cuerdas, ondas sonoras, oscilaciones de las corrientes en los aparatos de radio y televisión, vibraciones de estructuras (puentes, edificios,…), etc. El Movimiento Ondulatorio proporciona la base para el estudio posterior de las ondas electromagnéticas. Desde el tema tercero al sexto se estudian los conceptos básicos del electromagnetismo y de circuitos, tanto de corriente continua como alterna. En el tema siete se estudian las ondas electromagnéticas que son básicas para la comprensión de las comunicaciones. Finalmente el tema octavo introduce al alumno en los materiales semiconductores que son el soporte físico de los ordenadores. Dentro de cada tema se exponen ejemplos que ayudan a fijar los conceptos explicados.

TEMA I

OSCILADOR ARMÓNICO

El estudio del movimiento armónico simple constituye en física e ingeniería un capítulo muy importante. Muchos fenómenos como péndulo, vibraciones en tubos y cuerdas, ondas sonoras, oscilaciones de las corrientes en los aparatos de radio y televisión, vibraciones de estructuras (puentes, edificios,…), etc., son objeto de aplicación del estudio del movimiento armónico simple.

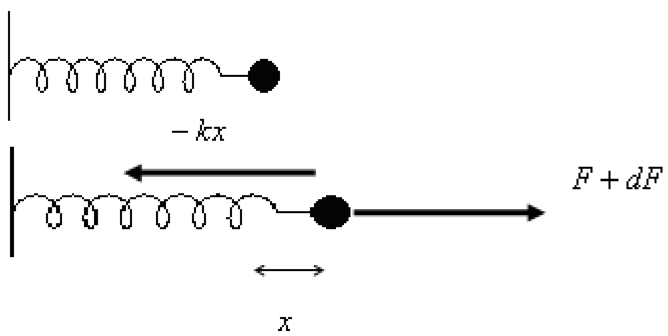
Cuando se perturba la posición estable de un cuerpo perdiendo su posición de equilibrio se producen oscilaciones. La característica más fácilmente reconocible del movimiento oscilatorio es que resulta periódico. En este tema comenzaremos estudiando el movimiento armónico sin pérdida de energía, y la composición de movimientos armónicos. Después introduciremos términos apropiados para incluir pérdida de energía (amortiguamiento), cómo proporcionamos energía para mantener el movimiento (oscilaciones forzadas), y el fenómeno de resonancia de gran importancia en la física aplicada.

1.1. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE.

Cuando se desplaza un objeto de su posición de equilibrio, si existe una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento se produce un movimiento armónico simple (MAS). La proporcionalidad entre la fuerza y el desplazamiento ocurre con mucha frecuencia en los sistemas mecánicos cuando la separación de la posición de equilibrio es pequeña.

Un sistema típico que presenta un movimiento armónico simple es el de un cuerpo unido a un muelle. En el equilibrio, el muelle no ejerce ninguna fuerza sobre el cuerpo. Cuando éste se desplaza una cantidad x de su posición de equilibrio, el muelle ejerce una fuerza sobre el cuerpo dada por:

$$F = -kx \tag{1.1}$$



Si queremos desplazar el cuerpo hacia la derecha, a una posición x, debemos de ejercer una fuerza $F = kx$ que compense a la fuerza de recuperación, y un elemento diferencial de fuerza dF que permita mover el cuerpo, de tal forma que la fuerza total que estamos ejerciendo es $F + dF$. El trabajo que realizamos al desplazar el cuerpo vendrá dado por: $W = \int (F + dF)dx = \int F\, dx + \int dF\, dx$. El segundo término de esta expresión es despreciable frente al primero, por lo que $W = \int F\, dx = \int kx\, dx$. Esta integral es inmediata. Se obtiene:

$$W = \frac{1}{2}kx^2 + cte. \qquad (1.2)$$

El trabajo realizado se convierte en energía potencial del cuerpo. Si en una posición determinada dejamos de aplicar fuerza y soltamos el cuerpo, éste comenzará a oscilar alrededor de la posición de equilibrio. El movimiento se produce como consecuencia de la energía que hemos suministrado. Si no hubiésemos ejercido ninguna fuerza el cuerpo permanecería en la posición de equilibrio, y no le habríamos aportado energía, por lo que podemos elegir la constante de integración en (1.2) igual a cero (para $x = 0, W = 0$). En consecuencia la energía potencial en una posición x, la podemos expresar como:

$$W = \frac{1}{2}kx^2. \qquad (1.3)$$

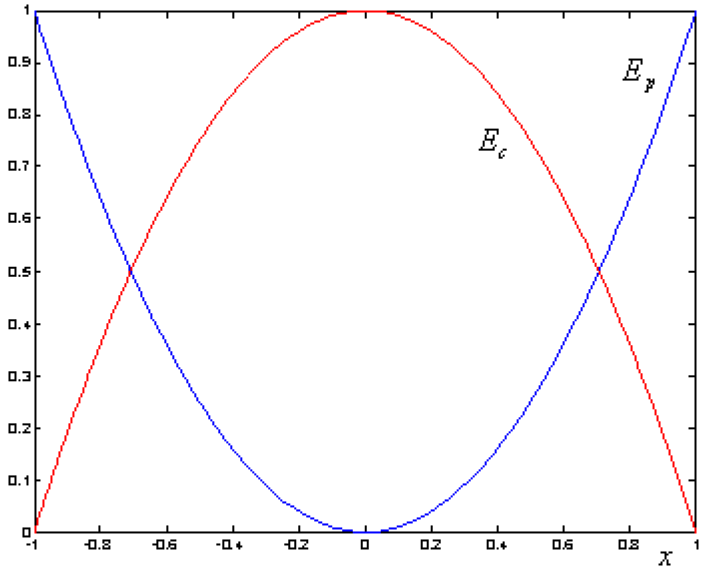
Sea A el máximo desplazamiento del cuerpo desde su posición de equilibrio. La energía potencial que tendrá el cuerpo en esa posición será: $W = \frac{1}{2}kA^2$, que es la energía total del cuerpo. Si ahora dejamos de aplicar fuerza sobre el cuerpo, éste se pondrá en movimiento, convirtiendo la energía potencial en cinética, de tal forma que cuando pase por la posición de equilibrio toda la energía se ha convertido en cinética. El cuerpo sigue en movimiento, por inercia, convirtiendo toda la energía cinética en potencial, pasando a una posición $-A$ de la posición de equilibrio. En una posición determinada x, tendrá una energía potencial:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (1.4)$$

y una energía cinética:

$$E_C = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right) \qquad (1.5)$$

En la siguiente figura se ha representado la energía potencial en azul, y la energía cinética en rojo, utilizando $A = 1, \quad k = 2$. Se puede apreciar que para $x = A$ toda la energía es potencial. Cuando x disminuye, la energía potencial va disminuyendo y la cinética aumentando, hasta que para $x = 0$ toda la energía se ha convertido en cinética. A partir de aquí el proceso se invierte: la energía cinética empieza a disminuir convirtiéndose en potencial, hasta $x = -A$, en donde toda la energía vuelve a ser potencial.



Representación de las energías potencial (azul) y cinética (rojo).

Ejercicio 1.1. En un MAS, hallar el valor de x para el que las energías cinética y potencial son iguales.

Se debe cumplir que $E_c = E_p \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right) \Rightarrow 2x^2 = A^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$

1.2. ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO.

La fuerza y la aceleración están relacionadas por la segunda ley de Newton $F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$, siendo m la masa del cuerpo y a la aceleración. En consecuencia, de (1.1) se debe satisfacer:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad (1.6)$$

que es la ecuación diferencial que determina el movimiento.

La ecuación diferencial (1.6) es muy conocida y fácil de resolver. Partamos de una función tipo seno o coseno y calculemos la primera y la segunda derivadas. A continuación de este párrafo, en la columna de la izquierda se utiliza la función seno, y en la columna de la derecha la función coseno, usando un parámetro w a determinar.

$$x = sen(wt) \qquad\qquad x = \cos(wt)$$

$$\frac{dx}{dt} = w\cos(wt) \qquad\qquad \frac{dx}{dt} = -wsen(wt)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 sen(wt) = -w^2 x \qquad\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -w^2\cos(wt) = -w^2 x$$

En la tercera línea de cada columna llegamos a la conclusión de que la segunda derivada es igual a $-w^2x$. Bastaría hacer $w^2 = k/m$ para que cualquiera de las funciones anteriores satisficiese la ecuación diferencial (1.6). Tan sólo tenemos que adaptar la función a las condiciones específicas de nuestro problema.

Tomemos como solución de la ecuación diferencial a una función de la forma:

$$x = A\,sen(wt + \varphi) \tag{1.7}$$

Hay que señalar que (1.7) se puede escribir como $x = A\cos(wt + \varphi + \pi/2) = A\cos(wt + \varphi')$, que tiene la misma forma que (1.7), pero utilizando la función coseno en vez de la función seno, de acuerdo con lo explicado anteriormente. Lo único que cambia es que el valor de φ y φ' serán diferentes. Para facilitar el estudio, hay un resumen de relaciones trigonométricas, al final del tema, que pueden utilizarse en el desarrollo del tema o en la resolución de problemas.

Derivando (1.7) obtenemos:

$$\frac{dx}{dt} = Aw\cos(wt + \varphi),\ \frac{d^2x}{dt^2} = -Aw^2\cos(wt + \varphi) = -w^2x.$$

En consecuencia, (1.7) es solución de la ecuación diferencial (1.6) si hacemos $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Esta magnitud se denomina frecuencia angular y se mide en radianes por segundo. Además el máximo valor que puede tomar x en (1.7) es A que se denomina amplitud. Al ángulo $(wt + \varphi)$ se le denomina fase. Para $t = 0$, $sen(\varphi) = \frac{x(0)}{A}$, siendo $x(0)$ la posición del cuerpo en el instante $t = 0$. Al ángulo φ se le denomina fase inicial. La posición del cuerpo en un instante $x(t)$ se le denomina elongación.

En el instante t_1, el cuerpo estará en la posición $x(t_1) = Asen(wt_1 + \varphi)$. Como el movimiento es periódico, al cabo de un tiempo T, el cuerpo estará en la misma posición. $x(t_1 + T) = Asen(w(t_1 + T) + \varphi) = A\,sen(wt_1 + wT + \varphi) = x(t_1)$. Para que esta igualdad se verifique debe ser $wT = 2\pi \Rightarrow w = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{w}$.

A T se le denomina periodo. Su inversa $\frac{1}{T} = f$ se le denomina frecuencia. El periodo se mide en segundos, y la frecuencia en s^{-1}, o Hertzios (Hz). Notemos que $w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$. Es decir, la frecuencia angular y la frecuencia es la misma magnitud medida en unidades diferentes.

Ejercicio 1.2. Una partícula tiene un desplazamiento dado por $x = 0.3 sen\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$, donde x se mide en metros y t en segundos. ¿Cuáles son la frecuencia, el periodo, la amplitud y la fase inicial?

Comparando con (1.7), la amplitud es $0.3\, m$. La frecuencia angular $w = 2\ rad/seg$, que expresada en Hz es $f = w/2\pi = 0.318\ Hz$. El periodo $T = 2\pi/w = 3.14\ seg$. La fase inicial es $\varphi = \pi/6\ rad$.

1.2.1. INTENSIDAD DEL M.A.S.

Se denomina intensidad del movimiento armónico simple al valor medio de la energía cinética en un periodo:

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T E_C\, dt \tag{1.8}$$

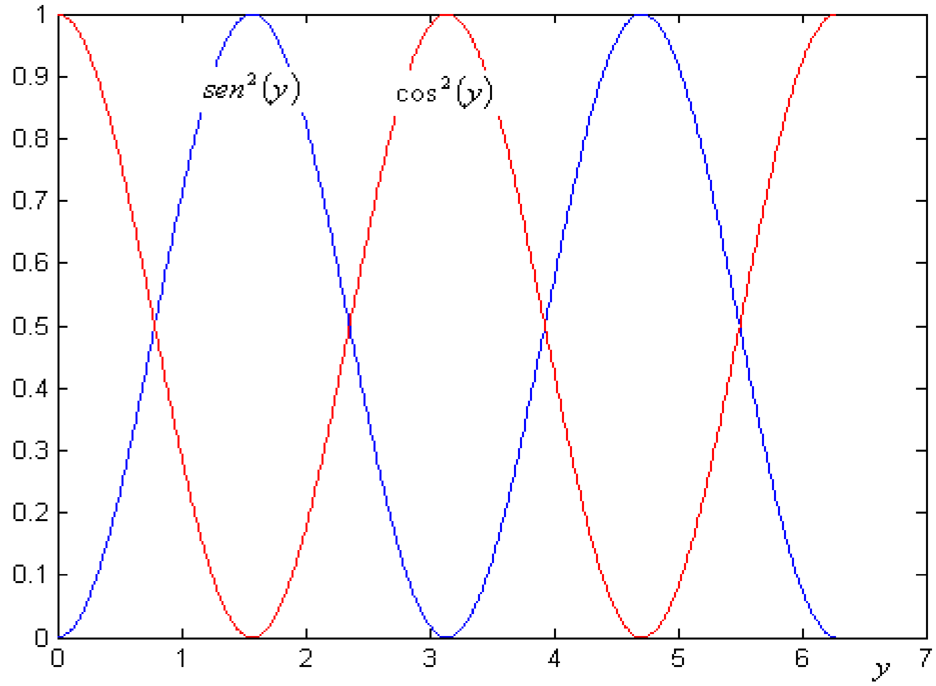
Para calcularla necesitamos realizar algunas consideraciones:

Hemos visto que la energía del cuerpo se descompone en energía cinética y energía potencial, que se pueden expresar como $E_C = \frac{1}{2}mv^2$, siendo v la velocidad del cuerpo, y $E_P = \frac{1}{2}kx^2$. La energía total es: $E_T = \frac{1}{2}kA^2 = E_C + E_P$.

De (1.7) podemos obtener la velocidad: $v = \frac{dx}{dt} = Aw\cos(wt + \varphi)$. La energía cinética será: $E_C = \frac{1}{2}mA^2w^2\cos^2(wt + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(wt + \varphi)$. Por otra parte, sustituyendo (1.7) en la energía potencial, $E_P = \frac{1}{2}kA^2 sen^2(wt + \varphi)$

Como vemos, la energía cinética depende del cuadrado del coseno de la fase, y la energía potencial depende del cuadrado del seno de la fase. Como $E_T = \frac{1}{2}kA^2 = E_C + E_P$, si tomamos valores medios, será: $\frac{1}{2}kA^2 = (E_C)_m + (E_P)_m$. De la expresión $E_C = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(wt+\varphi) \Rightarrow (E_C)_m = \frac{1}{2}kA^2\left(\cos^2(wt+\varphi)\right)_m$. Y de la expresión $E_P = \frac{1}{2}kA^2 sen^2(wt+\varphi) \Rightarrow (E_P)_m = \frac{1}{2}kA^2\left(sen^2(wt+\varphi)\right)_m$.

Sea y una variable cualquiera que representa a un ángulo. Se debe satisfacer $sen^2(y)+\cos^2(y)=1$. Si tomamos valores medios en esta expresión: $\left(sen^2(y)\right)_m + \left(\cos^2(y)\right)_m = 1$. En la siguiente figura se han representado sen^2 y $\cos^2$ de un ángulo en el intervalo $(0 \quad 2\pi)$. Se puede apreciar que la variación de las dos funciones es la misma, y en consecuencia, el valor medio de las dos funciones es el mismo.



Representación de sen^2 (azul) y $\cos^2$ (rojo) de una función

En consecuencia, $\left(sen^2(y)\right)_m = \left(\cos^2(y)\right)_m$, y de $\left(sen^2(y)\right)_m + \left(\cos^2(y)\right)_m = 1$, deducimos que $\left(sen^2(y)\right)_m = \left(\cos^2(y)\right)_m = \frac{1}{2}$.

Antes hemos visto que $(E_C)_m = \frac{1}{2}kA^2\left(\cos^2(wt+\varphi)\right)_m$. Como $\left(\cos^2(wt+\varphi)\right)_m = \frac{1}{2}$, debe ser $(E_C)_m = \frac{1}{4}kA^2$. Notemos que $(E_C)_m = (E_P)_m = \frac{1}{4}kA^2$.

Por tanto, la expresión (1.8) se puede poner como:

$$I = \frac{1}{4}kA^2 \qquad (1.9)$$

Las consideraciones que hemos realizado nos han servido para no tener que calcular la integral en la expresión (1.8).

Ejercicio 1.3. Un cuerpo de $3\,kg$ de masa sujeto a un muelle oscila con una amplitud de $4\,cm$ y un periodo de $2\,seg$. ¿Cuál es su energía total?¿Cuál es su velocidad máxima?¿Cuál es la intensidad del movimiento?

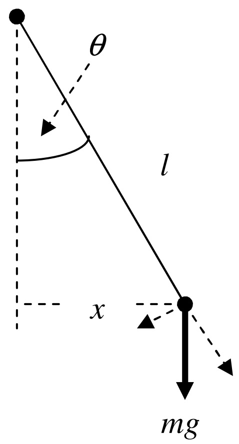
Necesitamos conocer k para determinar la energía total que es $E_T = \frac{1}{2}kA^2$. Como $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 3}{4} = 29.6\ N/m$. Sustituyendo:

$$E_T = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\times 29.6 \times (0.04)^2 = 2.37\times 10^{-2}\ J.$$

La velocidad máxima se obtiene cuando toda la energía se convierte en cinética, es decir, $E_T = E_C = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_T}{m}} = \sqrt{\frac{2\times 2.37\times 10^{-2}}{3}} = 0.126\ m/seg$

La intensidad del movimiento es $I = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{4}\times 29.6\times (0.04)^2 = 1.19\times 10^{-2}\ J$.

1.2.2. PÉNDULO MATEMÁTICO.



Un péndulo matemático es un punto material que oscila suspendido en un hilo inextensible y sin peso. Si el punto tiene de masa m, la fuerza que actúa sobre el cuerpo es el peso mg (figura izquierda). Desplacemos el péndulo de su posición de equilibrio un pequeño ángulo θ. La fuerza que actúa sobre el cuerpo se puede descomponer en la dirección de la cuerda y en la dirección perpendicular. En la dirección de la cuerda, la fuerza queda anulada por la tensión de la cuerda. La otra componente no se anula y produce el movimiento oscilatorio. Esta componente es:

$$F = -mg\,sen(\theta) = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x$$

El signo negativo se ha introducido para indicar que la fuerza se opone a la separación del péndulo de su posición de equilibrio.

Llamando $k = \frac{mg}{l}$, $F = -kx$, que coincide con la fuerza de recuperación del movimiento armónico simple. El periodo de oscilación lo podemos calcular a partir de $w^2 = \frac{k}{m} = \frac{g}{l} \Rightarrow w = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,

1.3. COMPOSICIÓN DE M.A.S.

1.3.1. COMPOSICIÓN DE M.A.S. DE MISMA DIRECCIÓN Y FRECUENCIA.

Sean dos movimientos armónicos simples de la misma dirección y frecuencia actuando sobre el mismo cuerpo. Queremos conocer el movimiento resultante. Vamos a ver que es otro movimiento armónico simple.

Sean $x_1 = A_1 sen(wt + \varphi_1)$ y $x_2 = A_2 sen(wt + \varphi_2)$ los dos movimientos que actúan sobre el cuerpo. Apliquemos la relación trigonométrica $sen(A + B) = senA \cos B + \cos A \; senB$ y operemos:

$$x_1 = A_1 sen(wt + \varphi_1) = A_1 sen(wt)\cos(\varphi_1) + A_1 \cos(wt) sen(\varphi_1)$$
$$x_2 = A_2 sen(wt + \varphi_2) = A_2 sen(wt)\cos(\varphi_2) + A_2 \cos(wt) sen(\varphi_2)$$

El movimiento resultante será:

$$x = x_1 + x_2 = sen(wt)[A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)] + \cos(wt)[A_1 sen(\varphi_1) + A_2 sen(\varphi_2)] \quad (1)$$

Llamemos $\begin{matrix} A\cos(\varphi) = A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2) \quad (2) \\ A sen(\varphi) = A_1 sen(\varphi_1) + A_2 sen(\varphi_2) \quad (3) \end{matrix}$.

Dividiendo (3) entre (2):

$$\tan(\varphi) = \frac{A_1 sen(\varphi_1) + A_2 sen(\varphi_2)}{A_1 \cos(\varphi_1) + A_2 \cos(\varphi_2)} \quad (1.10)$$

Elevando al cuadrado (2) y (3) y sumándolas:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2[\cos(\varphi_2)\cos(\varphi_1) + sen(\varphi_2)sen(\varphi_1)] \Rightarrow$$

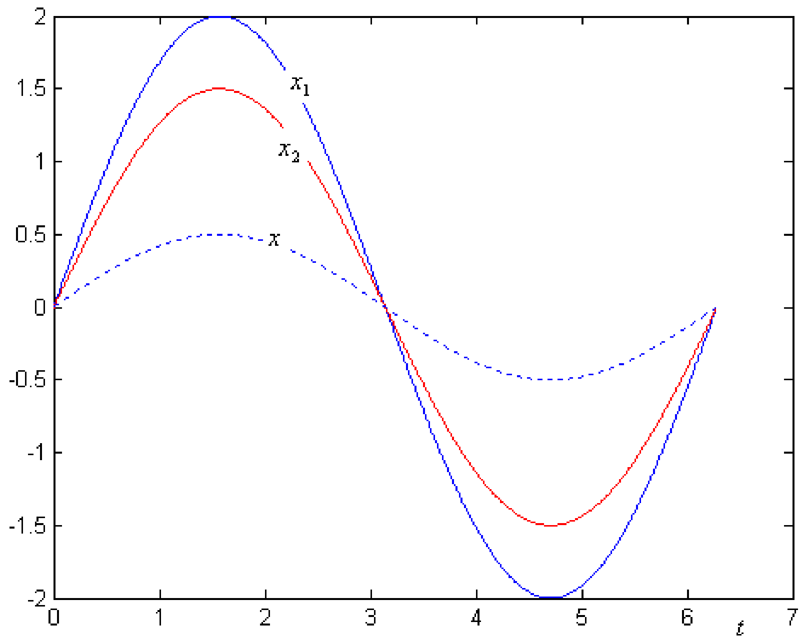
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (1.11)$$

Introduciendo (2) y (3) en (1):

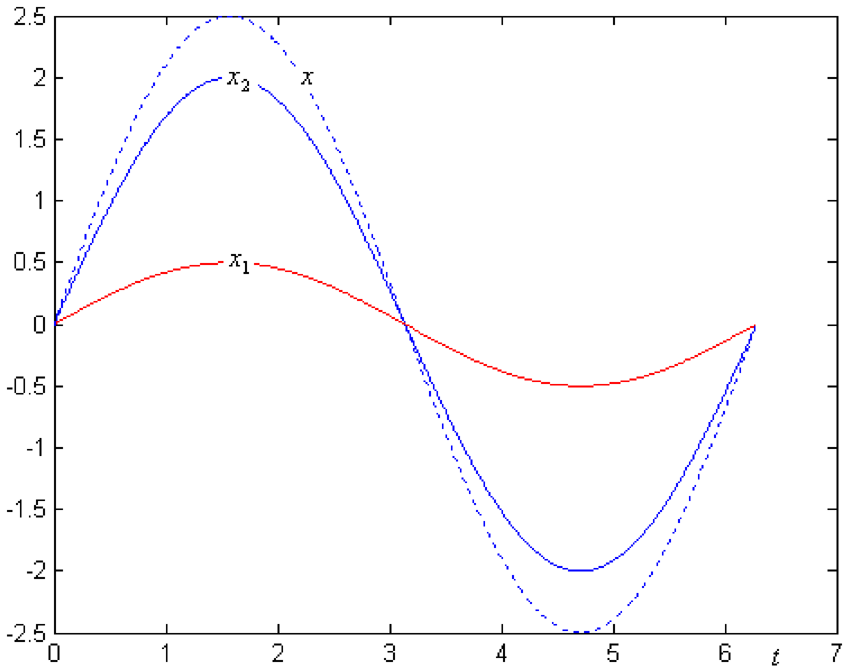
$$x = x_1 + x_2 = A\,sen(wt)\cos(\varphi) + A\cos(wt)sen(\varphi) = A\,sen(wt + \varphi) \quad (1.12)$$

En consecuencia, el movimiento resultante es otro movimiento armónico dado por (1.12), cuya amplitud viene dada por (1.11), y cuya fase inicial está dada por (1.10).

Casos particulares. Si $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$, entonces $A = A_1 - A_2$. Esto ocurre cuando $|\varphi_1 - \varphi_2| = n\pi$. Los movimientos están en oposición y se restan. El resultado está representado en la siguiente figura, donde un movimiento se representa en azul, el otro en rojo, y el movimiento resultante en línea discontinua.



Si $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$, entonces $A = A_1 + A_2$. Esto ocurre cuando $|\varphi_1 - \varphi_2| = 2n\pi$. Los movimientos están en fase y se suman. El resultado está representado en la siguiente figura, donde un movimiento se representa en azul, el otro en rojo, y el movimiento resultante en línea discontinua. x



Ejercicio 1.4. Calcular la diferencia de fase que deben tener dos movimientos vibratorios armónicos del mismo periodo, dirección y amplitud, para que el movimiento resultante tenga la misma amplitud que cualquiera de ellos, y expresar la ecuación del movimiento resultante.

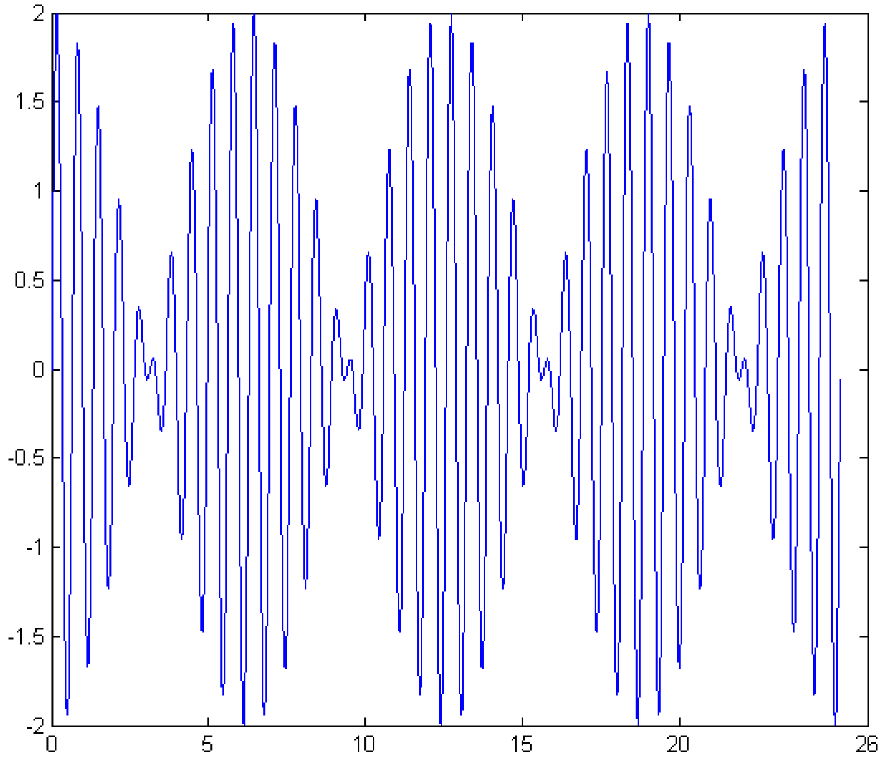
La amplitud resultante de los dos movimientos es $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi$, donde los subíndices se refieren a cada uno de los movimientos, y φ es la diferencia de fase. Como $A = A_1 = A_2 \Rightarrow \quad A^2 = 2A^2 + 2A^2 \cos\varphi \Rightarrow$ $\cos\varphi = -1/2 \Rightarrow \ \varphi = 2\pi/3 \ rad$. Cada uno de los movimientos se puede expresar como $x_1 = Asenwt$, $x_2 = Asen(wt + 2\pi/3)$, y el movimiento resultante es $x = Asen(wt + \alpha)$, siendo $\tan(\alpha) = \dfrac{Asen\varphi}{A + A\cos\varphi} = \sqrt{3} \Rightarrow \quad \alpha = \pi/3$. En consecuencia, el movimiento resultante es $x = Asen(wt + \pi/3)$

1.3.2. COMPOSICIÓN DE M.A.S. DE MISMA DIRECCIÓN, MISMA AMPLITUD Y FRECUENCIAS PRÓXIMAS.

Sean los movimientos $x_1 = Asen(w_1 t)$ y $x_2 = Asen(w_2 t)$, donde vamos a suponer que están en fase para mayor sencillez. Aplicando la relación trigonométrica $senB + senC = 2\,sen\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$, tendremos:

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\frac{w_1 - w_2}{2}t\right) sen\left(\frac{w_1 + w_2}{2}t\right) \tag{1.13}$$

El resultado es como dos movimientos perceptibles representados en la siguiente figura, uno de frecuencia alta que corresponde al seno (muchas ondas), y otro de frecuencia baja que corresponde al coseno (pocas ondas), como si los de frecuencia alta estuviesen dentro de (modulados por) los de frecuencia baja.



Suponiendo un muelle sometido a los dos movimientos, el resultado sería una oscilación rápida de frecuencia $(w_1 + w_2)/2$, con amplitud variable oscilando con frecuencia $(w_1 - w_2)/2$. A la frecuencia menor (periodo mayor) se le denomina frecuencia de pulsación.

Ejercicio 1.5. Determinar la ecuación de la vibración que resulta de estar sometida una partícula a los movimientos vibratorios armónicos de ecuaciones: $x_1 = 0.5\cos 10\pi t$ y $x_2 = 0.5\cos 12\pi t$, escritas en el sistema CGS y teniendo ambas la misma dirección de vibración. Calcúlese el periodo de pulsación.

El movimiento resultante es $x = x_1 + x_2 = 0.5(\cos 10\pi t + \cos 12\pi t)$. Aplicando la conocida relación trigonométrica $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$, tendremos, $x = 0.5 \cdot 2 \cdot \cos(11\pi t)\cos(-\pi t) = \cos(\pi t)\cos(11\pi t)$.

La frecuencia de pulsación es $w = \pi = 2\pi/T$, siendo T el periodo de pulsación, que será $T = 2\ seg$.

1.3.3. COMPOSICIÓN DE M.A.S. DE DIRECCIONES PERPENDICULARES, MISMA FRECUENCIA.

Sean $x = A_1 sen(wt)$ e $y = A_2 sen(wt + \varphi)$ dos movimientos perpendiculares de diferentes amplitudes desfasados φ radianes. Operando:

$$\frac{x}{A_1} = sen(wt) \Rightarrow \cos(wt) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}$$

$$\frac{y}{A_2} = sen(wt + \varphi) = sen(wt)\cos\varphi + \cos(wt)sen\varphi$$

$$\frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1}\cos\varphi + \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}sen\varphi$$

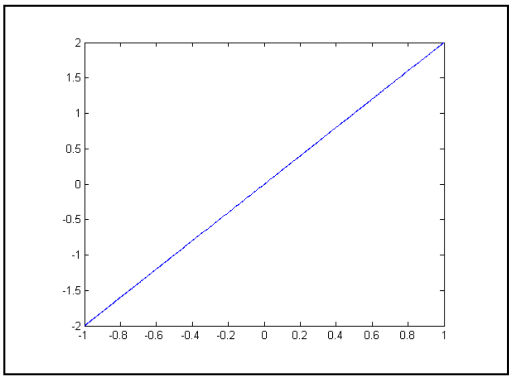
$$\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}sen\varphi$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2}\cos^2\varphi - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos\varphi = \left(1 - \frac{x^2}{A_1^2}\right)sen^2\varphi = sen^2\varphi - \frac{x^2}{A_1^2}sen^2\varphi$$

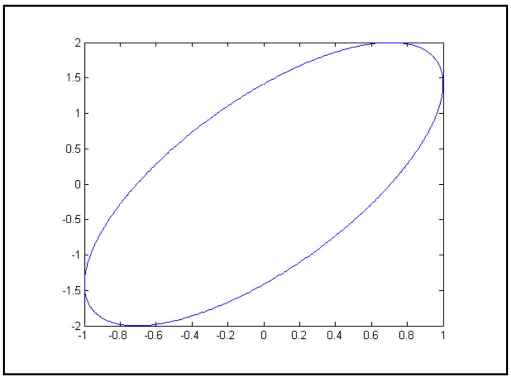
$$\frac{x^2}{A_1^2}\left(sen^2\varphi + \cos^2\varphi\right) + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos\varphi = sen^2\varphi$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos\varphi = sen^2\varphi \qquad (1.14)$$

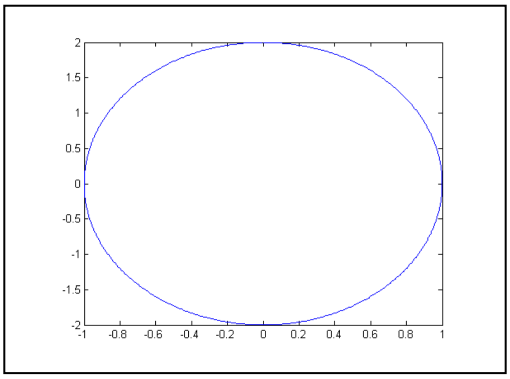
La ecuación (1.14) es una elipse. En la figura de la página siguiente se ha representado el movimiento, para $A_2 = 2A_1$ y diferentes valores de φ. En el caso de $\varphi = 0$, (1.14) se puede poner como: $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} = 0$, que es la ecuación de una recta.



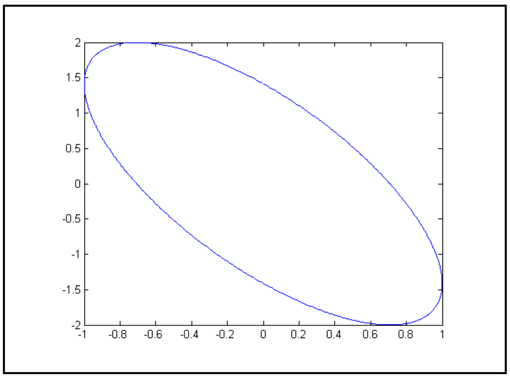
$\varphi = 0$



$\varphi = \pi/4$



$\varphi = \pi/2$

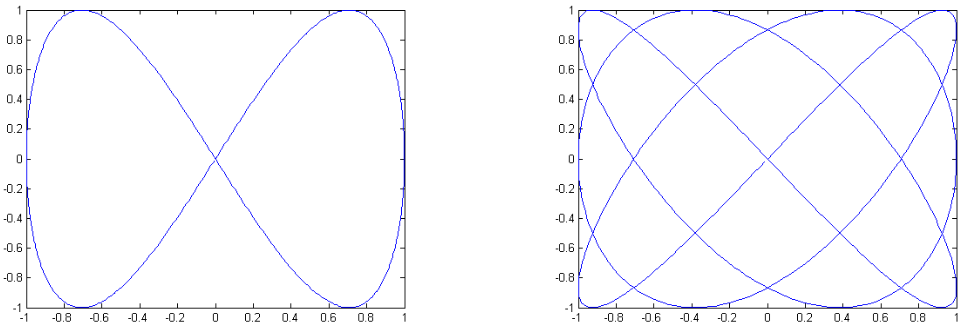


$\varphi = 3\pi/4$

Resultante de dos MAS perpendiculares igual frecuencia desfasados φ

1.3.4. COMPOSICIÓN DE M.A.S. DE DIRECCIONES PERPENDICULARES, FRECUENCIAS DIFERENTES.

Supongamos un cuerpo sometido a dos MAS perpendiculares cuyos periodos están en la relación $\frac{T_1}{T_2} = \frac{K_1}{K_2}$, siendo K_1 y K_2 tales que su máximo común divisor es la unidad. Al ser $T_1 K_2 = T_2 K_1 = T$, cuando por el primer movimiento el cuerpo haya realizado K_2 vibraciones enteras, por el segundo habrá realizado K_1, volviendo por tanto al punto de partida para describir de nuevo su trayectoria en el tiempo T. A las trayectorias obtenidas se les denomina curvas de Lissajous.



$K_1/K_2 = 1/2$ $\qquad\qquad$ $K_1/K_2 = 3/4$

Curvas de Lissajous

En la figura anterior se han representado dos de esas figuras. Son muy fáciles de obtener. En Matlab se pueden obtener tecleando:

$$k_1 = [valor\ de\ k_1];$$
$$k_2 = [valor\ de\ k_2];$$
$$t = 0:0.01:2*pi;$$
$$x = \sin(k_1 t);$$
$$y = \sin(k_2 t);$$
$$plot(x, y)$$